

Proseminar: Computermusik (WiSe 2002/03)  
Dozent: Prof. D. Rösner

**Markov - Ketten:  
Einführung in bedingte Wahrscheinlichkeiten  
mit Markov - Ketten**

## 0. Inhaltverzeichnis

0. Inhaltverzeichnis.....	2
1. Einführung.....	2
2. Motivation.....	3
3. Einführung in Markov - Prozesse.....	6
4. Biografie.....	7
5. Bedingte Wahrscheinlichkeiten.....	7
5.1 Übergangstabellen.....	8
5.2 Zufallsschritte.....	11
6. Programme.....	13
6.1 Programm zu Zufallsschritte.....	13
6.2 Programm zu Übergangstabellen.....	14
7. Zusammenfassung.....	15
8. Quellen.....	16
9. Erklärung.....	16

## 1. Einführung

In diesem Text möchte ich verdeutlichen, wie man bedingte Wahrscheinlichkeiten in der Musik ausnutzen kann, um mit dem Computer zufällige Musikstücke zu schreiben.

## 2. Motivation

Ohne bedingte Wahrscheinlichkeiten stellt man sich die Frage:

**„Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Note gespielt wird?“**

Zu diesem Zweck erstellt man sich eine Wahrscheinlichkeitstabelle. In diese Tabelle trägt man die alle Noten eines Musikstückes (oder einer Komposition) ein und zählt wie oft die jeweiligen Noten gespielt werden.

### **Beispiel:**

In folgender Tabelle sind die Wahrscheinlichkeiten aufgelistet, wie oft folgende Noten gespielt werden:

<b>Note</b>	<b>Wahrscheinlichkeit</b>
F4:	80 %
C4:	15 %
H4:	03 %
A4:	01 %

Wenn man nun einmal vier Noten nach dieser Wahrscheinlichkeitstabelle bestimmt, wird in etwa dieses hier herauskommen:

F4, F4, C4, A4

Wenn wir das nun einfach mal als Buchstaben betrachten, wird wohl das Wort „ffca“ herauskommen.

Nun betrachten wir dieses Beispiel mal mit bedingten Wahrscheinlichkeiten:

Hierbei stellen wir uns nun aber die Frage:

**„Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass einer aktuellen Note eine andere Note folgt?“**

Auch hierfür nutzt man wieder Wahrscheinlichkeitstabellen. Diese erstellt man auch wieder, in dem man zum Beispiel ein Musikstück (oder eine Komposition) nimmt, aber dieses Mal zählt man wie oft auf eine bestimmte Note eine andere Note folgt. Diese Methode führt man dann mit allen möglichen Kombinationen fort.

Erweitern lässt sich dies noch, in dem man nicht nur eine nachfolgende Note betrachtet sondern gleich zwei oder mehrere nachfolgende Noten. Dazu aber später mehr.

### **Beispiel:**

In nachfolgender Tabelle stehen nun einmal die Wahrscheinlichkeiten für 2 aufeinander folgende Noten:

<b>Notenpaare</b>	<b>Wahrscheinlichkeit</b>
C4 -> H4	93 %
F4 -> A4	90 %
A4 -> C4	97 %

Alle weiteren Paarungen wie zum Beispiel C4 -> F4 mit einer Wahrscheinlichkeit von 4 % wurden hier der Einfachheit halber weggelassen.

Als Startpunkt legen wir die Note F4 aus dem letzten Beispiel fest.

Wenn wir nun wieder nach dieser Tabelle die restlichen drei Noten bestimmen, wird folgendes heraus kommen:

F4, A4, C4, H4

Da laut der Tabelle auf ein F4 mit 93-prozentiger Wahrscheinlichkeit ein A4 folgt und mit 97-prozentiger Wahrscheinlichkeit ein C4 auf ein A4 folgt.

In Buchstaben gesprochen würde nun das Wort „fach“ heraus kommen. Wie man sieht kann man mit diesem Verfahren schon eine gute Rechtschreibprüfung erstellen, in dem man alle mögliche Kombination von Buchstaben in einer Tabelle erfassen würde.

1950 analysierte Harry F. Olsen 11 Werke von Stephen Foster durch auszählen. Harry F. Olsen war ein sehr berühmter „Zufallsmusiker“, der viele Werke gezählt und für seine eigene Musik genutzt hat. In der nachfolgenden Tabelle sieht man einmal wie oft bestimmte Noten von Stephen Foster gespielt wurden.

<u>Tonhöhe</u>	<u>Wahrscheinlichkeit</u>
H3	.0047
C#4	.0490
D4	.1578
E4	.0708
F#4	.1035
G4	.0626
G#4	.0463
A4	.1824
H4	.1143
C#5	.0789
D5	.0816
E5	.0481

Des Weiteren analysierte er, wie ein vier viertel Takt von Stephen Foster mit Noten gefüllt wird:

<u>4 / 4 Takt</u>	<u>Wahrscheinlichkeit</u>
o	.125
d d	.250
••••	.125
d•••	.125
•d••	.125
••d•	.125
•••d	.125
—■—	.125

### 3. Einführung in Markov - Prozesse

#### Definition:

Ein Markov Prozess ist ein stochastischer Prozess, dessen zukünftige Wahrscheinlichkeitsverteilung nur vom gegenwärtigen Zeitpunkt und vom gegenwärtigen Zustand des Prozesses abhängt und nicht davon, wie der gegenwärtige Zustand erreicht wurde.

Das bedeutet, dass wenn man erstmal einen Zustand erreicht hat, es egal ist wie man den Vorgängerzustand erreicht hat.

#### Beispiel:

Zunächst wird der Startzustand festgelegt, was in diesem Beispiel einfach durch Auswahl der Note F4 geschieht. Nach einer Wahrscheinlichkeitstabelle folgt nun, dass auf der Note F4 ein G4 folgt und auf das G4 ein A4. Jetzt sind wir bei der Note A4 und wechseln die Wahrscheinlichkeitstabelle. In der neuen Tabelle stehen jetzt jeweils die beiden letzten Noten. Also suchen wir jetzt nach G4 A4 und sehen, dass darauf ein C4 folgt. An dieser Stelle hat uns aber nicht mehr interessiert, wie wir auf das G4 und A4 gekommen sind. Sondern nur noch das dort ein G4 und ein A4 steht.

## Markov Ketten

Eine Markov Kette ist das Resultat einer oder mehrerer Markov Prozesse.

## 4. Biografie

Andrei Andreyevich Markov wurde am 14. März 1856 (Russland) geboren. Ab 1876 studierte er an der Universität in Petersburg. 1886 zum Professor ernannt, beschäftigte er sich mit der Analysis, mit der Theorie der Grenzfunktionen, der Konvergenz von Zahlen. Durch Pafnuty Chebyshev erlernte er die Methode der kontinuierlichen Brüche an der Zufallsreihe. Er untersuchte Sequenzen von voneinander abhängigen Variablen, in der Hoffnung die Grenzesetze der Wahrscheinlichkeit in ihrer allgemeinen Form zu ergründen.



Zu dieser Zeit entstanden die Markov - Ketten und Markov - Prozesse. 1923 war Norbert Wiener der erste, der sich mathematisch streng mit einem kontinuierlichen Markov - Prozess beschäftigt hat. Die Bildung einer allgemeinen Theorie wurde während den 30iger Jahren von Andrei Kolmogorov geliefert. Beide waren sehr an der Dichtkunst interessiert und studierten diese auch.

Markov hatte einen Sohn mit gleichem Namen, der am 09. September 1903 geboren wurde und wie sein Vater ein renommierter Mathematiker wurde.

Markov starb am 20. Juli 1922 in St. Petersburg (Russland).

## 5. Bedingte Wahrscheinlichkeiten

**Definition:**

Bei bedingten Wahrscheinlichkeiten hängt der Nachfolger immer von seinem(n) Vorgänger(n) ab.

Es gibt 3 fundamentale Techniken, wobei hier nur auf die ersten beiden eingegangen wird.

1. Übergangstabellen
2. Zufallsschritte
3. Spektren

### 5.1 Übergangstabellen

Übergangstabellen kommen wie wir es in der Motivation schon praktiziert haben von existierenden Werken oder durch Kompositionsentwürfe.

Bei existierenden Werken geschieht dies durch Auszählen:

**Beispiel:**



D: 5 / 43, A: 8 / 43, H3: 3 / 43      1: 3 / 16, 2: 4 / 16  
0,116    0,186    0,069      0,187    0.25

In diesem Beispiel wurde das D4 fünfmal gezählt, das A4 achtmal und das H3 dreimal. Des Weiteren wurde die Notenfolge halbe, viertel, viertel dreimal und die Notenfolge halbe, halbe viermal gezählt.

**Eigenschaften von Übergangstabellen:**

- Die Spalten einer Übergangstabelle müssen immer den Wert 1 (100 %) ergeben, damit alle auftretenden Fälle abgedeckt werden.
- Endlosschleifen sollte man vermeiden, also zum Beispiel nie auf ein C4 ein C4 folgen lassen.
- Je mehr Vorgänger man einbezieht, desto mehr Dimensionen muss die Tabelle haben.

### **Anwendung:**

- Die Anfangsnote kann vom Benutzer oder zufällig gewählt werden.
- Für klassische Werke werden meist mehrdimensionale Übergangstabellen benutzt, um den Stil des Komponisten beizubehalten.
- Jeder Eintrag in einer Tabelle braucht mindestens 4 Byte (da float Werte) Speicher.
- Für eine Tabelle, die 6 Vorgänger verwendet um einen neuen Ton zu erzeugen werden dann schon 143 Megabyte an Speicher benötigt.
- Je länger man die Kette an Vorgängern wählt, desto mehr ähnelt das Stück dem Original.

Die bekanntesten Komponisten, die Übergangstabellen genutzt haben sind Lejaren Hiller und Gottfried Michael König (um 1960).

### **Mathematisch:**

$$P \{X_n = i \mid X_{n-1} = j\} = p_{ij}$$

Die Wahrscheinlichkeit, das  $X = i$  wenn das letzte  $X = j$  war ist  $p_{ij}$ . ( $p_{ij}$  – Werte für die Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1)

### **Beispiel:**

		letzte Tonhöhe			
		C	D	E	G
nächste Tonhöhe	C	0,0	0,3	0,0	0,0
	D	1,0	0,3	0,3	0,0
	E	0,0	0,4	0,6	0,5
	G	0,0	0,0	0,1	0,5

In dieser Übergangstabelle stehen in den Spalten die letzte Tonhöhe und in den Zeilen die nachfolgende Tonhöhe.

Wenn wir jetzt als letzte Tonhöhe ein G haben, sieht man das darauf zu 50% ein E oder zu 50% ein G folgt.

Des Weiteren sieht man dass mit 100 % Wahrscheinlichkeit ein D auf ein C folgt.

Wenn man anstatt der 100 % bei D das C gewählt hätte, hätte man eine Endlosschleife produziert, da man ja nicht mehr vom C wekommt.

Als nächstes schauen wir uns nun mal die Sequenz DEG mit Startzustand D an:

Die Wahrscheinlichkeit, dass auf das D ein G folgt liegt bei 40 % und die

Wahrscheinlichkeit, dass auf das E ein G folgt, liegt bei 10 %. Daraus ergibt sich durch Multiplikation eine Gesamtwahrscheinlichkeit von 4 %.

Wenn wir nun aber die Sequenz CDG betrachten, sehen wir, dass wir eine

Gesamtwahrscheinlichkeit von 0% bekommen, da die Wahrscheinlichkeit, dass auf ein D ein G folgt bei 0% liegt.

Bei den letzten beiden Beispielen handelte es sich um Wahrscheinlichkeiten 2.ter Ordnung:

$$p_{ijk} = p_{ij} * p_{jk}$$

Da wir 2 Wahrscheinlichkeiten zusammenmultipliziert haben.

Ab einer Tabelle erster Ordnung (also eine mit einem Vorgänger) kann man einen Markov - Prozess vollständig beschreiben, da sich eine Tabelle höherer Ordnung daraus erstellen lässt.

In einer Tabelle höherer Ordnung werden die Wahrscheinlichkeiten sehr klein.

### **Algorithmus:**

algorithm itt (last)

    u <- Float – Zufallswert (aus dem Bereich 0 – 1)

    j <- 0

    while u > temp

        temp <- p[j, last-1]

        j <- j + 1

    return j

Diesem Algorithmus wird die letzte Note mit übergeben.

U wird ein Zufallswert übergeben und j bekommt den Wert 0. Nun wird nachgeschaut, so lange wie u (die Zufallszahl) kleiner als temp ist wird der Wert aus p[j, last-1] (last-1 weil die Tabelle nullbasiert ist) zu temp addiert und j um eins erhöht. Durch das Aufaddieren von temp erreichen wir das spätestens nach der letzten Iteration der Wert bei 1 liegt, was auch gleichzeitig die höchstmögliche Zufallszahl ist.

## **5.2 Zufallsschritte**

Die zweite Möglichkeit, um bedingte Wahrscheinlichkeiten zu nutzen sind die Zufallsschritte.

Bei Zufallsschritten wird nach jedem Schritt eine Zufallszahl bestimmt. Wenn die Zahl größer als 0,5 geht man einen Schritt rauf, ansonsten einen Schritt runter.

**Beispiel:**

Man stelle sich einen Mann vor, der mitten auf einer Leiter steht. Nun wirft er eine Münze. Wenn diese Münze Kopf zeigt geht er einen Schritt nach oben, ansonsten einen Schritt nach unten. Sein Ziel ist von der Treppe herunter zu kommen.

Nun gibt es aber drei Arten von Grenzen:

**Reflektierende Grenzen:**

Wenn man am oberen oder unteren Ende angekommen ist, geht man wieder in die andere Richtung. Was für unseren Mann bedeutet, er müsste wenn er unten oder oben angekommen ist wieder in die andere Richtung gehen (in diesem Fall braucht er auch keine Münze zu werfen, da es nur die Gegenrichtung gibt), ohne von der Leiter runter zu gehen.

**Elastische Grenzen:**

Je näher man der Grenze kommt, desto kleiner ist die Wahrscheinlichkeit sich ihr zu nähern. Bei unserem Mann auf der Treppe wäre im Prinzip die Münze für die Gegenrichtung beschwert, so dass sie immer wieder die Gegenrichtung bevorzugt.

**Absorbierende Grenzen:**

Wenn man einmal das obere oder untere Ende erreicht hat, sind die Zufallschritte beendet. Im Fall des Mannes würde das bedeuten, er hat sein Ziel erreicht, er ist von der Treppe runter.

**Algorithmus:**

```
algorithm iwalk (last)
  u <- Zufallswert
  j <- last
```

```
if u >= 0,5
    j <- j + 1
if u < 0,5
    j <- j - 1
```

Diesem Algorithmus wird wieder die Vorgängernote überreicht und danach ein Zufallswert bestimmt. Wenn dieser Wert größer 0.5 wird der letzten Note eine Tonhöhe dazu addiert, ansonsten eine Tonhöhe abgezogen.

## 6. Programme

Um Zufallsschritte und Übergangstabellen an einem praktischen Beispiel zu demonstrieren, habe ich 2 Programme in C-Sharp und DirectX 9 programmiert. Für beide Programme ist es wichtig, dass sich ein Verzeichnis namens Pitches auf Laufwerk D befindet und darin die einzelnen Tonhöhen enthalten sind und DirectX größer 9 auf ihrem Rechner installiert ist.

### 6.1 Programm zu Zufallsschritte



In dem Programm ist es möglich das Intervall der Töne zu ändern, um schnelle und langsame Musikstücke abzuspielen. Des Weiteren ist es Möglich die untere und obere Grenze festzulegen.

## **6.2 Programm zu Übergangstabellen**



Auch hier ist das Einstellen des Intervalls möglich. Wie im Text beschrieben, kann man den Startwert einstellen und sich eines der beiden Beispiele aussuchen. Im ersten Beispiel werden 4 Tonhöhen verwendet, und im zweiten Beispiel 16 Stück.

## 7. Zusammenfassung

In diesem Text haben wir folgende Techniken betrachtet:

- Zufallsschritte:
  - Sie sind für die Musik nur bedingt geeignet, da man immer nur eine Note rauf oder runter geht. Auch wenn man diesen Algorithmus auf eine Matrix anwendet kommt einfach nichts richtig Wohlklingendes bei heraus. Zufallsschritte sind eher dafür geeignet um die Notenlängen eines Taktes zufällig auszuwählen
- Übergangstabellen:
  - Sie sind für zufällig komponierte Musikstücke eher geeignet, da sie in jeder Hinsicht anpassbar sind. Des Weiteren springen sie

nicht nur von einer Note zur nächsten, sondern nutzen vorher festgelegte Wahrscheinlichkeitstabellen. Man sollte nur darauf achten, dass man von einem vorgegebenen Werk nicht zu viele Vorgänger betrachtet, sonst hört sich das Musikstück am Ende genau wie das Original an.

Durch Anwenden beider Techniken kommen schon ganz brauchbare Ansätze zur automatischen Musikgenerierung heraus nur sollten diese dann danach noch vom Menschen verfeinert werden.

## **8. Quellen**

Altmann, G., Musikalische Formenlehre, Mit Beispielen und Analysen. Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1979 (4. Auflage)

Dodge, C. & Jerse, T., Computer music: synthesis, composition, and performance. New York: Schirmer Books 1997

Michels, U., dtv-Atlas zur Musik: Tafeln und Texte, Band 1. München: Deutscher Taschenbuch Verlag und Bärenreiter-Verlag 1987 (11. Auflage)

<http://www.mrs.umn.edu/~sungurea/introstat/history/w98/markov.html> (Biografie)

## **9. Erklärung**

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig, d.h. ohne fremde Hilfe, verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen verwendet sowie wörtliche Zitate als solche gekennzeichnet habe.